

6. Stejnolehlost

DEF.: **PODOBNÉ ZOBRAZENÍ (PODOBNOST)** je geometrické zobrazení (v rovině), pro které existuje $k > 0$ tak, že pro každé 2 dvojice bodů A, A' a B, B' mezi a obrazu platí: $|A'B'| = k \cdot |AB|$ k ... poměr (koeficient) podobnosti

- pro $k=1 \Rightarrow$ SHODNOST (mří. případ podobnosti)
- $k > 1 \Rightarrow$ ZVĚTŠENÍ
- $0 < k < 1 \Rightarrow$ ZMENŠENÍ

(STEJNOLEHLOST... $k=|k|$)

- ÚTVARY U, U' PODOBNÉ $\Leftrightarrow$ existují podobné zobrazení, které zobrazí U na U'

- mří. $U' \sim U$

- např. podobnost Δ (mří. dův. - věty o podobnosti Δ : uu, sus, ssu)

- INVERZNÍ ZOBRAZENÍ k podobnosti s koef. k je PODOBNOST s koef. $\frac{1}{k}$

- SLOŽENÍM 2 PODOBNOSTÍ s koef. k_1, k_2 vznikne PODOBNOST s koef. $k_1 \cdot k_2$

DEF.: **STEJNOLEHLOST (HOMETETIE) $\mathcal{H}(S, k)$** je zobrazení S a koeficientem k (stejnolehlost k ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)) je podobné zobrazení, které přechází

1. bodu S bod $S'=S$

2. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že $|SX'| = |k| \cdot |SX|$, přitom

pro $k > 0$ má bod X' na SX

pro $k < 0$ má bod X' na opačné polopřímce k SX

- odpis: $\mathcal{H}(S, k): X \rightarrow X'$

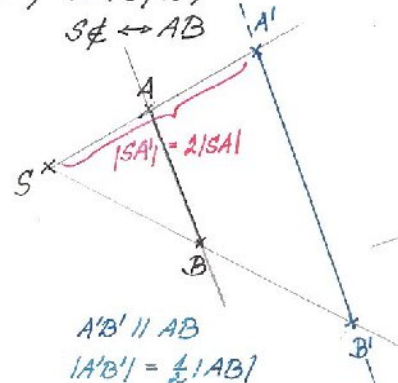
$\mathcal{H}(S, k): U \rightarrow U'$

k ... mří., X' ... obraz U, U' ... stejnolehlosti

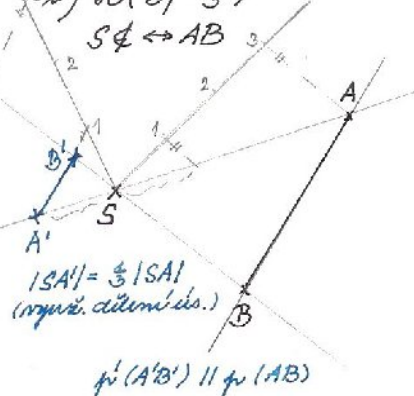
Příklady

① Zobrazí body A, B (resp. $p \leftrightarrow AB$, úsečku AB) v stejnolehlosti

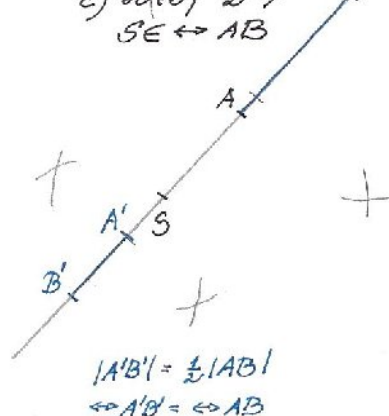
a) $\mathcal{H}(S, 2)$



b) $\mathcal{H}(S, -\frac{1}{3})$



c) $\mathcal{H}(S, -\frac{1}{2})$



VĚTA

Pro každou stejnolehlost $\mathcal{H}(S, k)$ platí: (mří. p. ①)

- OBRAZEM libovolné PŘÍMKY p je PŘÍMKA p' ROVNOBĚŽNÁ s p ($p' \parallel p$)
- OBRAZEM libovolné ÚSEČKY AB je ÚSEČKA $A'B'$ ROVNOBĚŽNÁ s AB ($A'B' \parallel AB$)
 - pro $k > 0$... souhlasně orientovaná
 - pro $k < 0$... nesouhlasně orientovaná
 - POMĚR $\frac{|A'B'|}{|AB|} = |k|$
- OBRAZEM ÚHLU je ÚHEL SHODNÝ ($\alpha' = \alpha$)

SAHODRUŽNÉ BODY (viz př. ①)

- pro $k=1 \Rightarrow$ KAŽDÝ BOD
- pro $k \neq 1 \Rightarrow$ JEDEN - STŘED STEJNOLEHLOSTI S

[pokud $k=-1 \Rightarrow$ STŘEDOVÁ SOUHEBNOST]

SAHODRUŽNÉ PŘÍMKY (viz př. ①c)

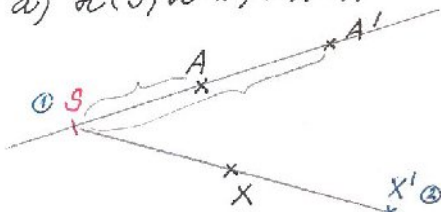
- Některé PŘÍMKY PROCHÁZÍJÍCÍ STŘEDEM STEJNOLEHLOSTI S

STEJNOLEHLOST JEDNOZNAČNĚ URČENA S a k , můžeme dvojicí bodů - obrazem A a obrazem $A' (\neq S)$ a středem stejnolehlosti S nebo koeficientem k
 $\Rightarrow AA' \text{ prochází } S (S \in AA')$ viz př. ②, ③

Příklady

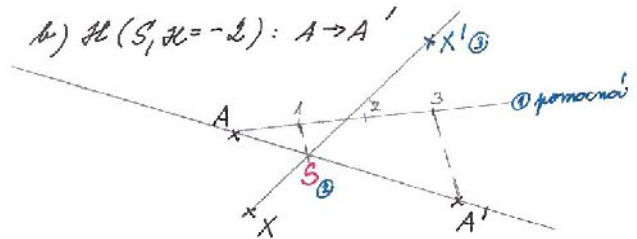
- ② Měli S a obraz bodu X v stejnolehlosti, určí-li bod A a jeho obraz A' a koeficient k

a) $H(S, k=2): A \rightarrow A'$



$k=2 > 0 \Rightarrow S \in AA'$ a $AA' \parallel SX$. $|AA'|$ od A
 $X' \in SX$ tak, že $|SX'| = 2|SX|$

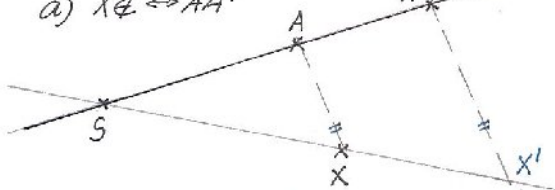
b) $H(S, k=-2): A \rightarrow A'$



$k=-2 < 0 \Rightarrow S \in AA'$ (A' je opačný $\rightarrow k \mapsto SA$)
 tak, že $|SA'| = 2|SA|$
 $|SA'| : |SA| = 2 : 1$
 rozdělení úsečky AA'

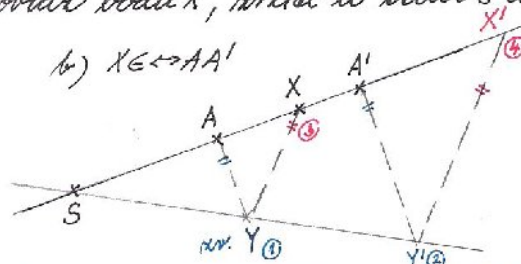
- ③ Měli v stejnolehlosti $H(S, k)$ obraz bodu X , určí-li střed S a dvojici bodů A, A' (mimo A obraz) a

a) $X \notin AA'$



$X \in SX \cap p'$ $p' \parallel AA'$ bodem A'

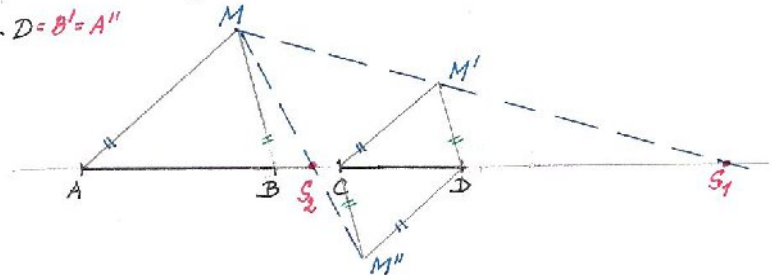
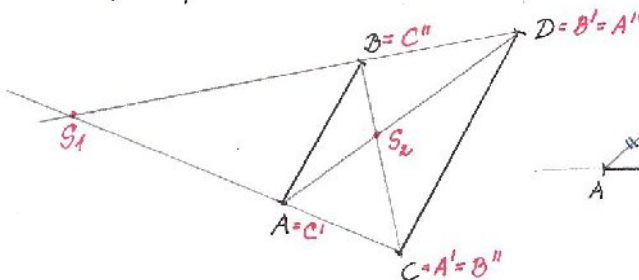
b) $X \in AA'$



nov. pomoc. bod $Y \notin AA' \Rightarrow H(S, k): Y \rightarrow Y'$ (viz a)
 $\Rightarrow X$ nale. a nym. Y, Y' (mimo A, A' - viz a)

- ④ Dány 2 rovnoběžné úsečky různé délky jsou středem S stejnolehlosti, v nichž se zobrazí jedna úsečka na druhou.

a) AB, CD NELEŽÍ NA STEJNÉ PŘÍMCE b) AB, CD LŽÍ NA STEJNÉ PŘÍMCE



VĚTA Každé 2 ROVNOBĚŽNÉ ÚSEČKY RŮZNÉ DÉLKY jsou STEJNOLEHLÍ 2 ZPŮSOBY

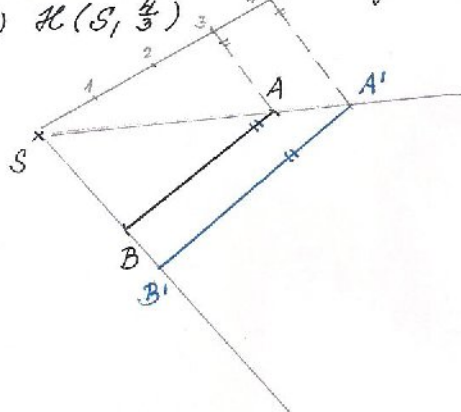
$H(S_1, k_1), H(S_2, k_2)$

$S_1 \dots$ VNĚJŠÍ STŘED } stejnolehlosti
 $S_2 \dots$ VNITŘNÍ STŘED

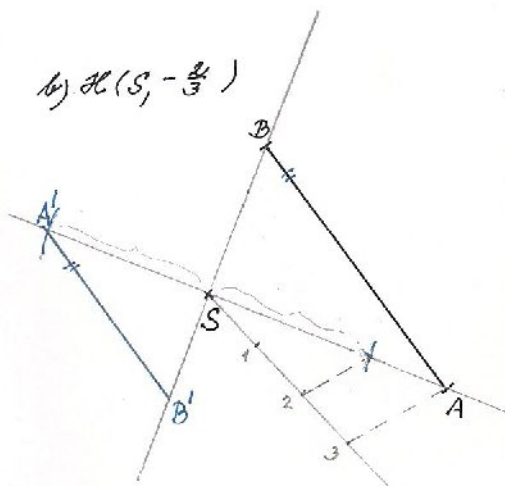
nov. pomoc. bod $M \notin AB$
 PODOBNÉ $\Delta \leftarrow \Delta ABM \sim \Delta CDM' (\Delta CDM'')$
 (rovnoběžky $AM_1 \parallel BM$) $\Rightarrow S_1 \in AB \cap \leftrightarrow MM'$
 $\Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta CDM' \Rightarrow S_2 \in AB \cap \leftrightarrow MM''$
 podle věty 4b)

⑤ Konstrukce úseček AB v stejnoměrnosti

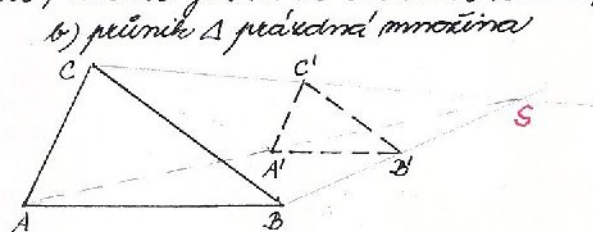
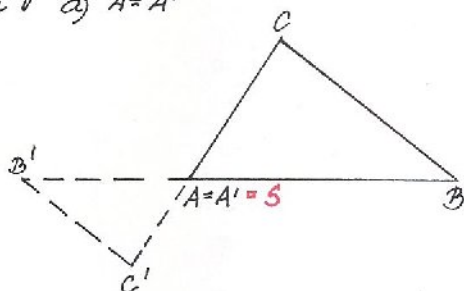
a) $\mathcal{H}(S, \frac{4}{3})$



b) $\mathcal{H}(S, -\frac{2}{3})$

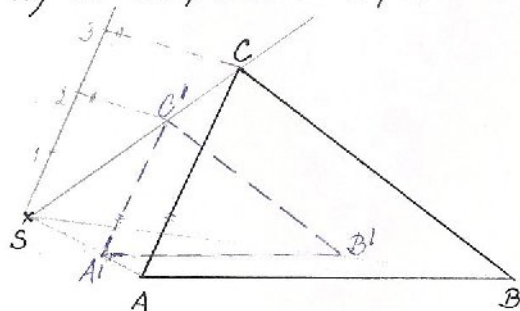


⑥ Zvolte dvojici podobných $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, které mají rovnoběžné odpovídající strany a sestavte střed stejnoměrnosti, v který je $\triangle A'B'C'$ obrazem $\triangle ABC$, je-li a) $A=A'$

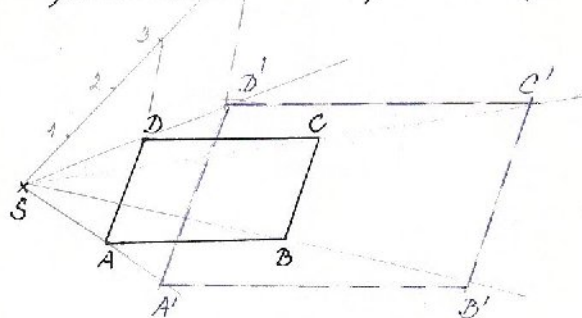


⑦ V stejnoměrnosti $\mathcal{H}(S, \kappa)$ sestavte obraz

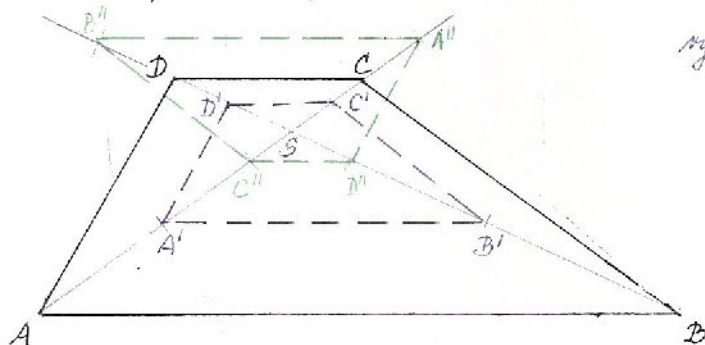
a) $\triangle ABC$, kde $\kappa = \frac{2}{3}$, S vně



b) rovnoběžník $ABCD$, kde $\kappa = \frac{5}{3}$, S vně

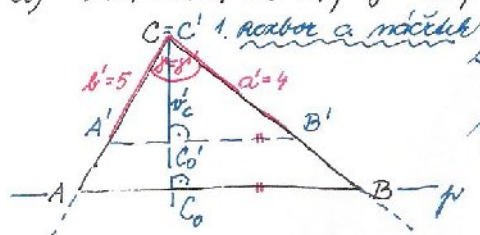


c) lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), kde S je průsečík úhlopříček a koeficient $\kappa_1 = \frac{1}{2}$ a $\kappa_2 = -\frac{1}{2}$



rych. rovnoběžnosti stejnoměrných úseček

- 8) Vestrojte vzhledy ΔABC , kde
a) $|AC|:|BC| = 5:4$, $\gamma = 60^\circ$, $v_C = 5 \text{ cm}$



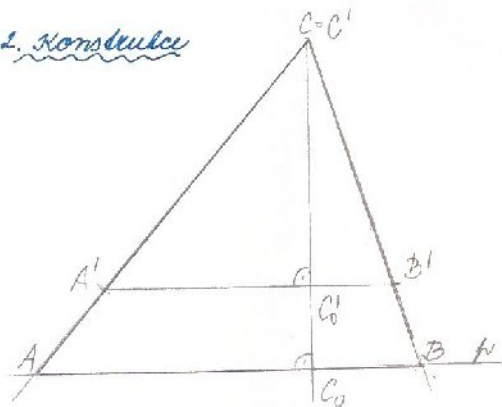
sestrojíme pomocný podobný $\Delta A'B'C'$ (sus)
 $b' = 5 \text{ cm}$, $a' = 4 \text{ cm}$, $\gamma' = \gamma = 60^\circ$

myšl. $\mathcal{H}(C'; \kappa): \Delta A'B'C' \rightarrow \Delta ABC$

bod $C = C'$, $v_C = 5 \text{ cm}$ ($A'B' \cap p \rightarrow C_0$) $\rightarrow C_0$

$A \in \rightarrow CA' \cap p$ } $p \parallel A'B'$ mod.
 $B \in \rightarrow CB' \cap p$ } $v_C = |CC_0| = 5 \text{ cm}$

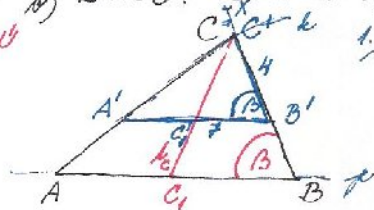
2. Konstrukce



3. Zápis konstrukce

- $\Delta A'B'C'$ (sus) $C = C'$
 - $A'C'$; $|A'C'| = b' = 5 \text{ cm}$
 - $\angle A'C'B'$; $|\angle A'C'B'| = 60^\circ = \gamma' = \gamma$
 - k ; $k(C'; a' = 4 \text{ cm})$
 - B' ; $B' \in k \cap \rightarrow C'X$
- C_0 ; $C_0 \in p \cap A'B'$
- C_0 ; $C_0 \in k_1 \cap \rightarrow CC_0$, $k_1(C'; v_C = 5 \text{ cm})$
- p ; $p \parallel A'B'$ bodem C_0
- A ; $A \in \rightarrow CA' \cap p$
- B ; $B \in \rightarrow CB' \cap p$
- ΔABC

- b) ΔABC : $a:c = 4:7$, $\beta = 45^\circ$, $b_c = 4,5 \text{ cm}$



2. Konstrukce

1. Rozbor a měřítko

sestrojíme pomocný podobný $\Delta A'B'C'$ (sus)
 $a' = 4 \text{ cm}$, $c' = 7 \text{ cm}$, $\beta' = \beta = 45^\circ$

myšl. $\mathcal{H}(C'; \kappa): \Delta A'B'C' \rightarrow \Delta ABC$

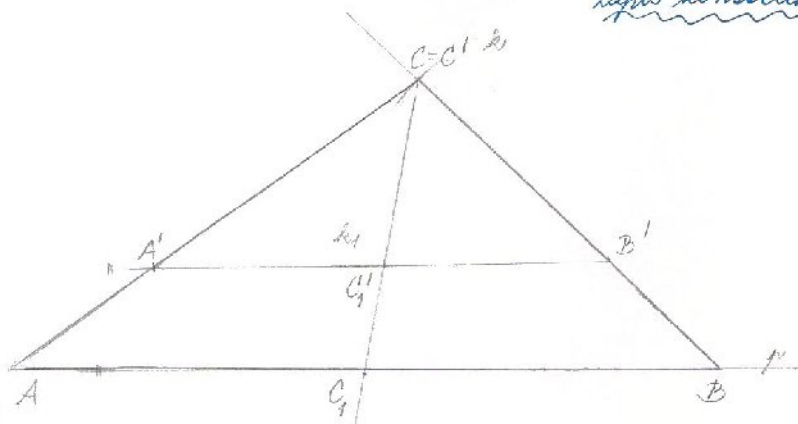
M. b. $C = C'$

$C_0 \in \rightarrow CC_0$, $|CC_0| = b_c = 4,5 \text{ cm}$

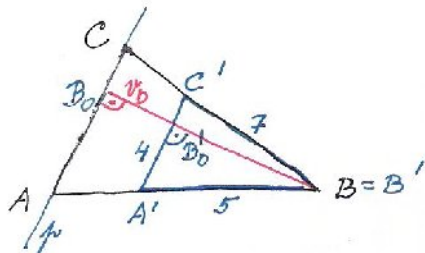
M. b. $A \in \rightarrow CA' \cap p$ } $p \parallel A'B'$ bodem C_0
 $B \in \rightarrow CB' \cap p$

Zápis konstrukce:

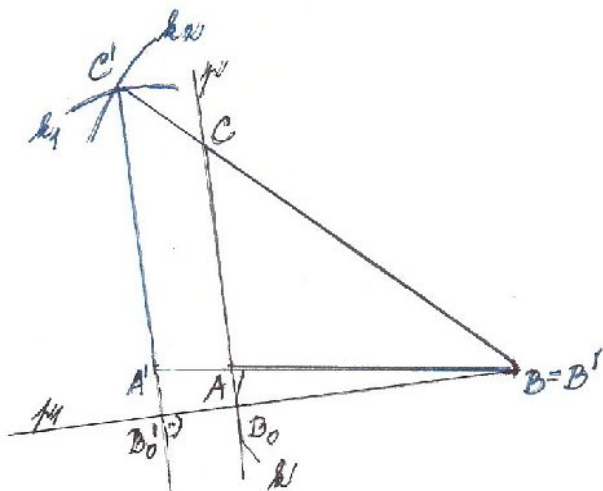
- $\Delta A'B'C'$ (sus)
 - $A'B'$; $|A'B'| = c' = 7 \text{ cm}$
 - $\angle A'B'C'$; $|\angle A'B'C'| = \beta = 45^\circ$
($120^\circ \rightarrow 90^\circ \rightarrow 45^\circ$ q.k.f.)
 - C' ; $C' \in \rightarrow B'C' \cap k(B', 4 \text{ cm})$
- C_0 ; C_0 střed $A'B'$
- C_0 ; $C_0 \in \rightarrow CC_0 \cap k_1(C'; b_c)$
- p ; $p \parallel A'B'$ mod. bodem C_0
- A ; $A \in \rightarrow CA' \cap p$
- B ; $B \in \rightarrow CB' \cap p$
- ΔABC



c) $\triangle ABC$: $a:b:c = 4:4:5$, $v_b = 40\text{mv}$



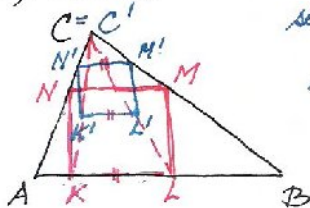
sist. lib. $\triangle A'B'C'$ (sss)
 $a'=4\text{cm}$, $b'=4\text{cm}$, $c'=5\text{cm}$
 [ke stejnostlosti $\mathcal{H}(B; \kappa)$ se podle $A'C'$ ma AC]
 - mrd. od B užitím κ v_b
 $\mathcal{H}(B; \kappa)$: $\triangle A'B'C' \rightarrow \triangle ABC$ tak, že
 $B_0 \in \rightarrow BB_0' \cap \kappa(B; v_b)$
 $C \in \rightarrow B'C' \cap \kappa \parallel A'C'$ bodem B_0
 $A \in \rightarrow B'A' \cap \kappa$



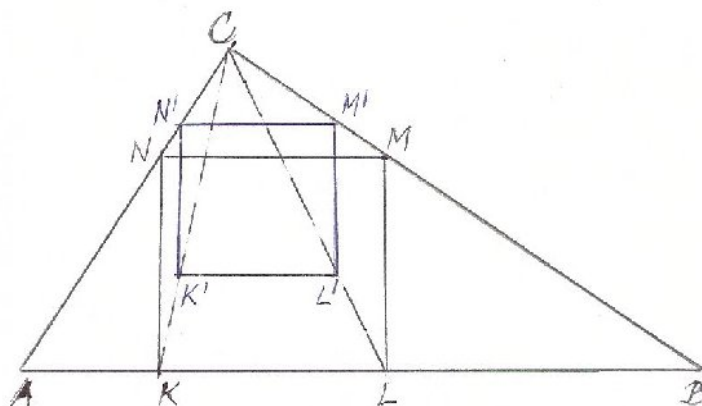
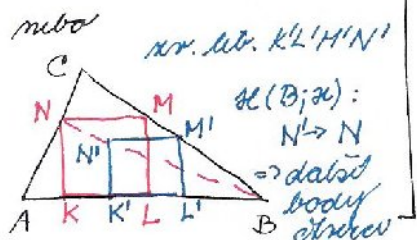
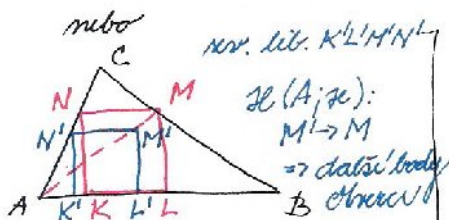
1. $\triangle A'B'C'$ (sss)
 - 1. $A'B'$; $|A'B'| = 5\text{cm}$
 - 2. k_1 ; k_2 (A' ; $b'=4\text{cm}$)
 - 3. k_2 ; k_3 (B' ; $a'=4\text{cm}$)
 - 4. C' ; $C' \in k_1 \cap k_2$
2. μ_1 ; $\mu_2 \perp \leftrightarrow A'C'$
3. B_0 ; $B_0 \in \mu_1 \cap \leftrightarrow A'C'$
4. k_4 ; k_5 (B' ; $v_b = 40\text{mv}$)
5. B_0 ; $B_0 \in \rightarrow BB_0' \cap k_4$
6. μ ; $\mu \parallel \leftrightarrow A'C'$ bodem B_0
7. A ; $A \in \rightarrow B'A' \cap \mu$
8. B ; $B \in \rightarrow B'C' \cap \mu$
9. C ; $C = C'$
10. $\triangle ABC$

9) Vepište

a) čtverec KLMN do daného ostroúhelníku $\triangle ABC$ tak, aby $KL \subset AB$, $ME \subset BC$, $NE \subset AC$

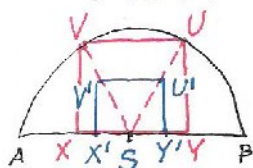


sist. lib. čtverec $K'L'M'N'$ (kom. $M'N' \parallel AB \Rightarrow$
 dopln. ma čtverec $K'L'H'N'$)
 úsečka $K'L'$ se na $\mathcal{H}(C; \kappa)$ podle ma úsečku KL
 $\mathcal{H}(C; \kappa)$: $K' \rightarrow K$ $K \in AB \cap \rightarrow CK'$
 $L' \rightarrow L$ $L \in AB \cap \rightarrow CL'$
 $\Rightarrow$ doplníme ma čtverec (kolmice $\kappa K, L$) $KLMN$

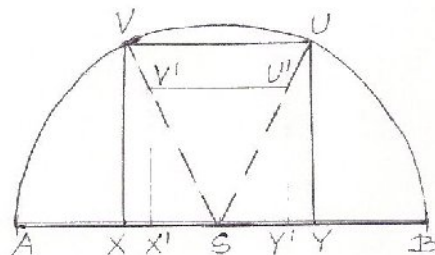


9) POKR. Vepišťu

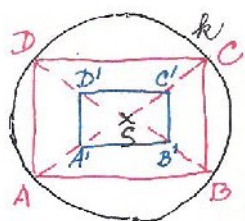
b) Čtverec XYUV do půlkruhu s průměrem AB tak, aby jeho střed XY ležela na průměru AB



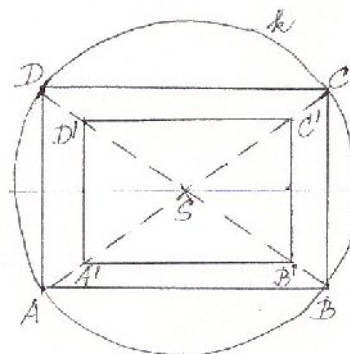
- sestroj. lib. čtverec $X'Y'U'V'$ tak, aby S ležel na $X'Y'$
- mykš. $\mathcal{H}(S; \kappa): U' \rightarrow U, V' \rightarrow V$
 $U \in k \cap \rightarrow SU'$
 $V \in k \cap \rightarrow SV'$
- $X \in AB \cap p_1 \quad p_1 \perp VU$ bodem V
 $Y \in AB \cap p_2 \quad p_2 \perp VU$ bodem U



c) obdélník ABCD do kružnice $k(S; 2,5 \text{ cm})$



- lib. obdélník $A'B'C'D'$ tak, aby bod S byl středem obdél.
- mykš. $\mathcal{H}(S; \kappa): A' \rightarrow A, B' \rightarrow B, C' \rightarrow C, D' \rightarrow D$ (přp. 1 bod ω doplníme na obdélník)



OBDOBA:

tak, aby $|AB|:|BC| = 3:4$

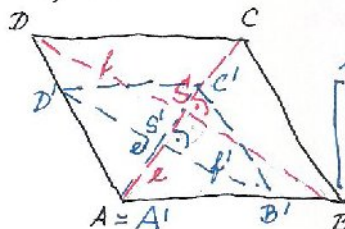
$\Rightarrow$ lib. obd. $A'B'C'D'$, kde

$a' = |A'B'| = 3 \text{ cm}, b' = |B'C'| = 4 \text{ cm}$

S střed úhlopříček $\Rightarrow$ dále mix níže

10) Zestroj

a) kosodélnice ABCD, ji-li $a:f = 3:4, a = 4 \text{ cm}$
 kratší delší úhl.



lib. kosodélnice $L' = 3 \text{ cm}, f' = 4 \text{ cm}$

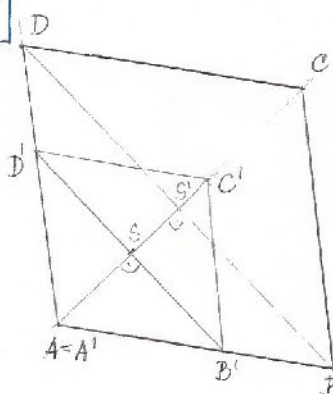
1. $A'C' = L' = 3 \text{ cm} \quad p \perp A'C'$ bodem S' (střed $A'C'$)

2. $B' \in k(S', 2 \text{ cm}) \cap p$

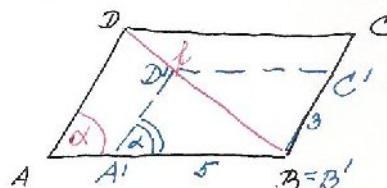
3. $D' \in k(S', 2 \text{ cm}) \cap p$

$\mathcal{H}(A', \kappa): B' \rightarrow B \Rightarrow$ doplnit na kosodélnice (či kladní)

$|AB| = a = 4 \text{ cm}$



b) kosodélnice ABCD, ji-li $a:b = 5:3, a = 45^\circ, f = 5 \text{ cm}$



- kosodélnice $A'B'C'D'$: $a' = 5 \text{ cm}, b' = 3 \text{ cm}, \alpha = 75^\circ$
 (5:3)

- mykš. $\mathcal{H}(B', \kappa): D' \rightarrow D \quad |B'D'| = 6 \text{ cm}, B = B'$

- pomocí pravohybnosti doplnit na kosodélnice

- kdyby místo α bylo kladné $\beta = 120^\circ$

- kosodélnice $A'B'C'D'$: $a' = 5 \text{ cm}, b' = 3 \text{ cm}, \beta = 120^\circ$

- mykš. $\mathcal{H}(B', \kappa): D' \rightarrow D'$

kl. k. $D \in \rightarrow BD' \cap k_4 \quad k_4(B; f = 5 \text{ cm})$

- doplníme na kosodélnice